

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МОДЕЛИ (для Р 7)

Памятка по ключевым вопросам теории для подготовки к экзамену

1. Классическое определение вероятности

Пусть производится некоторый опыт. Непосредственный результат опыта называют элементарным событием или исходом. Множество всех элементарных событий обозначают Ω . Появление какого-либо исхода исключает появление других исходов и все исходы равновозможны.

Любое событие, которое может произойти или не произойти в результате эксперимента, называют случайным событием.

Совокупность элементарных событий, появление которых влечёт появление события A , называют событиями, благоприятствующими событию A .

Пусть Ω - конечное множество. Тогда вероятность события A равна

$$P(A) = \frac{k}{n},$$

где k - число благоприятствующих исходов, n - число всех исходов.

2. Определение условной вероятности события.

Условной вероятностью события B при условии появления события A называется отношение вероятности произведения событий A и B к вероятности события A :

$$P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)}, P(A) \neq 0$$

3. Определение независимых событий

События A и B называются независимыми, если вероятность произведения данных событий равна произведению их вероятностей:

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

4. Определение несовместных событий

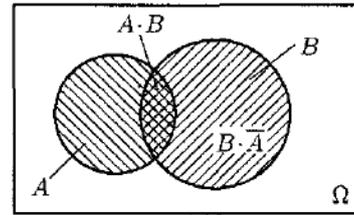
События называют несовместными, если появление одного из них исключает появление других событий в одном и том же испытании.

5. Вероятность суммы событий

Теорема.

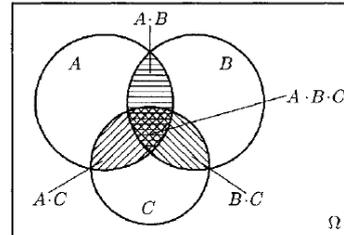
1) Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их произведения

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$



Теорема. Вероятность суммы трёх совместных событий:

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$



6. Вероятность произведения событий

Теорема. Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое событие произошло:

$$P(AB) = P(A)P_A(B) = P(B)P_B(A)$$

7. Формула полной вероятности

Теорема. Пусть событие A может произойти вместе с одним из событий H_1, H_2, \dots, H_n , называемых гипотезами и удовлетворяющих следующим свойствам:

$$\forall i \neq j: H_i \cdot H_j = \emptyset, \text{ и } H_1 + H_2 + \dots + H_n = \Omega$$

то есть образующими полную группу, тогда

$$P(A) = P_{H_1}(A)P(H_1) + P_{H_2}(A)P(H_2) + \dots + P_{H_n}(A)P(H_n).$$

8. Формула Байеса

Теорема. Пусть событие A может произойти вместе с одним из событий H_1, H_2, \dots, H_n , называемых гипотезами и удовлетворяющих следующим свойствам:

$$\forall i \neq j: H_i \cdot H_j = \emptyset, \text{ и } H_1 + H_2 + \dots + H_n = \Omega,$$

то есть образующими полную группу, тогда условная вероятность гипотезы H_i при условии, что событие A произошло

$$P_A(H_i) = \frac{P(H_i)P_{H_i}(A)}{P(A)},$$

где $P(A) = P_{H_1}(A)P(H_1) + P_{H_2}(A)P(H_2) + \dots + P_{H_n}(A)P(H_n).$

9. Функция распределения случайной величины.

Определение. Функцией распределения случайной величины X называется функция, которая каждому вещественному числу $x \in$

$(-\infty, +\infty)$ ставит в соответствие вероятность того, что случайная величина X принимает значение, меньшее, чем x .

$$F(x) = P(X < x).$$

10. Свойства функции распределения.

1. Условие ограниченности:

$$0 \leq F(x) \leq 1.$$

2. Условие неубывания: если $x_1 \leq x_2$, то

$$F(x_1) \leq F(x_2).$$

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.

4. Вероятность того, что значение, принятое случайной величиной X попадёт в промежуток (a, b) , вычисляется по формуле

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a).$$

5. Функция распределения непрерывна слева, то есть

$$\lim_{x \rightarrow a-0} F(x) = F(a).$$

11. Плотность распределения непрерывной случайной величины.

Плотностью распределения $f(x)$ непрерывной случайной величины X называется производная её функции распределения: $f(x) = F'(x)$.

12. Свойства плотности распределения.

1. Условие неотрицательности

$$f(x) \geq 0.$$

2. Вероятность попадания непрерывной случайной величины X в промежуток $[a, b]$ равна определённому интегралу от её плотности в пределах от a до b

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx.$$

3. Функция распределения непрерывной случайной величины X может быть выражена через её плотность по формуле:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

4. Условие нормировки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1.$$

13. Математическое ожидание случайной величины

Определение 1. Математическим ожиданием дискретной случайной величины X , имеющей закон распределения $p_i = P(X = x_i)$,

называется **число**, равное сумме произведений всех её значений на соответствующие им вероятности

$$M(X) = \sum p_i x_i.$$

Определение 2. Математическим ожиданием непрерывной случайной величины, имеющей плотность распределения вероятностей $f(x)$ называется число

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx.$$

14. Свойства математического ожидания

1. Математическое ожидание постоянной равно самой этой постоянной: $M(C) = C$.

2. Постоянный множитель выносится за знак математического ожидания: $M(CX) = CM(X)$.

$$3. M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y).$$

$$4. M(X - M(X)) = 0.$$

5. Пусть X и Y независимые случайные величины, тогда $M(X \cdot Y) = M(X)M(Y)$.

15. Дисперсия

Определение. Дисперсией случайной величины X называется математическое ожидание квадрата её отклонения от своего математического ожидания:

$$D(X) = M(X - M(X))^2$$

Дисперсия характеризует разброс значений случайной величины X от её математического ожидания.

На практике дисперсию удобно находить по формуле

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2.$$

16. Свойства дисперсии

1. Дисперсия постоянной равна нулю:

$$D(C) = 0.$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возведя его в квадрат:

$$D(CX) = C^2 D(X).$$

3. Пусть X и Y независимые случайные величины, тогда

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y).$$

$$4. D(X + C) = D(X).$$

5. Пусть X и Y независимые случайные величины, тогда

$$D(XY) = M(X^2)M(Y^2) - (M(X))^2(M(Y))^2.$$